Integration von Wurzelfunktionen (3) mit speziellen Substitutionen

mit sin und cos

mit sinh und cosh

Text Nr. 48070

Stand: 18. Februar 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Stoff-Verteilung zur Integration

Grundniveau - Gymnasium

Datei Nr. 48011 Teil 1	Einführung in die Grundlagen: Änderungen und Differenziale Lineare Änderungen / Nicht-lineare Änderungen Lineare Änderungen auf der Tangente - Differenzialbegriff Das unbestimmte Integral – Stammfunktionen - Grundintegral 1
Datei Nr. 48012 Teil 2:	Integrationsregeln Unbestimmte Integrale für ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen mit vielen Substitutionsarten. Umfangreiches Übungsmaterial
Datei Nr. 48013 Teil 3	Das bestimmte Integral für Potenzfunktionen, ganzrationale und gebrochen rationale Funktionen, auch mit Substitution.
Datei Nr. 48014 Teil 4	Integration von Wurzelfunktionen (1)
Datei Nr. 48030	Grundniveau für einfache Anforderungen: Gemischtes Trainingsheft Gründlichen Wiederholen und Trainieren: Potenzfunktionen, Rationale Funktionen, Wurzel-, Exponential- und Trigonometrische Funktionen.
Datei Nr. 48015 Teil 5	Partielle Integration: alles
Datei Nr. 45041 Teil 6	Exponentialfunktionen alles
Datei Nr. 46041 Teil 7	Ln-Funktionen alles
Datei Nr. 48016 Teil 8	Trigonometrische Funktionen alles
Datei Nr. 48040	Lernblatt: Die wichtigsten Integrale

Höheres Niveau (Studium)

Gebrochen rationalen Funktionen:

Datei Nr. 48050	Integrationsmethoden - Übersicht
Datei Nr. 48051	Integration mit Partialbruchzerlegung
Datei Nr. 48052	Reduktionsformel bzw. Umgekehrte partielle Integration
Datei Nr. 48055	Integration mit arctan-Funktionen
Datei Nr. 48060	Sammlung schwerer Integrale
Datei Nr. 48056	Integration von Wurzelfunktionen (2) mit arcsin-Funktionen
Datei Nr. 48070	Integration von Wurzelfunktionen (3): Substitutionen mit sin und sinh
Datei Nr. 48057	Integration der Arkusfunktionen
Datei Nr. 48061	Schwierige Integrale Aufgabensammlung

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Übersicht und Inhalt:

Zur Integration von Wurzeln der Form $\sqrt{a^2-x^2}$ sowie $\sqrt{x^2\pm a^2}$ (a > 0) helfen Substitutionen weiter:

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ mit $x=a\cdot\sin(u)$ $=\sqrt{a^2-a^2\sin^2(u)}=a\sqrt{1-\sin^2(u)}=a\cdot\cos(u)$
2. $\sqrt{x^2+a^2}$ mit $x=a\cdot\sinh(u)$ $=\sqrt{a^2\cdot\sinh^2(u)+a^2}=a\cdot\sqrt{\sinh^2(u)+1}=a\cdot\cosh(u)$
3. $\sqrt{x^2-a^2}$ mit $x=a\cdot\cosh(u)$ $=\sqrt{a^2\cdot\cosh^2(u)-a^2}=a\cdot\sqrt{\cosh^2(u)-1}=a\cdot\sinh(u)$

Außerdem kann man Radikanden wie ax^2+bx+c durch quadratische Ergänzung auf eine dieser Formen bringen. Es gibt noch andere Substitutionsvarianten für diese Wurzeln, auf die ich nicht eingehe. Außerdem wird immer nur die positive Lösung betrachtet. Gemäß $\sqrt{x^2}=|x|$ ist dann auch $\sqrt{1-\sin^2(x)}=|\cos(x)|$ und $\sqrt{\sinh^2(x)+1}=|\cosh(x)|$. Den Betrag lasse ich hier weg.

Ich zeige also meistens nur die formalen Umformungen bei diesen Integralen.

1. Substitution mit Sinus:

1.1	$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$	Seite 4	1.2	$\int\sqrt{4-x^2}\,dx$	Seite 5
1.3	$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,dx$	Seite 6	1.4	$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$	Seite 7
1.5	$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$	Seite 8	1.6	$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$	Seite 8
1.7	$\int x^2\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx$	Seite 9			

2. Substitution mit sinh oder cosh

2.1	$\int\sqrt{x^2+4}\,dx$	Seite 11	2.2	$\int\sqrt{x^2-4}\,dx$	Seite 13
2.3	$\int\sqrt{x^2+4x}\,dx$	Seite 14	2.4	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	Seite 15
2.5	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$	Seite 15	2.6	$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}\,dx$	Seite 16
2.7	$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+5)}}$	Seite 16	2.8	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$	Seite 17
2.9	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$	Seite 18	2.10	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx$	Seite 19
2.11	$\int\frac{1}{\sqrt{2x^2-18}^3}\,dx$	Seite 20	2.12	$\int\frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx$	Seite 21
2.13	$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$	Seite 22	2.14	$\int\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$	Seite 23

3. Geometrische Anwendungen auf Kreis, Ellipse und Hyperbel Seite 24

Demo-Text für www.mathe-cd.de

1. Substitution mit Sinus

Hintergrund:

Integrale der Form $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ passen zu dieser Rechnung: $\sqrt{1-\sin^2(x)}=\cos(x)$.

Daher ist es naheliegend, die Substitution $x=\sin(u)$ vorzunehmen.

Beispiel 1.1 $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$ $\boxed{x=\sin(u) \Rightarrow dx=\cos(u)\,du}$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos(u)\cdot du=\int\cos^2(u)\,du.$$

Einschub 1: Berechnung dieses Folgeintegrals mit partieller Integration:

$\int\cos^2(x)\,dx=\int\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$ Die Formel für die partielle Integration lautet:

$\int u'\cdot v\cdot dx=[u\cdot v]-\int v'\cdot u\cdot dx$ mit $\begin{cases}u'=\cos(x) \Rightarrow u=\sin(x)\\ v=\cos(x) \Rightarrow v=-\sin(x)\end{cases}$ ergibt:

$\int\cos^2(x)\,dx=\sin(x)\cdot\cos(x)+\int\sin^2(x)\,dx$ Anwenden: $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$\int\cos^2(x)\,dx=\sin(x)\cdot\cos(x)+\int(1-\cos^2(x))\,dx$

$\int\cos^2(x)\,dx=\sin(x)\cdot\cos(x)+x-\int\cos^2(x)\,dx$ $\quad|+\int\cos^2(x)\,dx$

$2\cdot\int\cos^2(x)\,dx=\sin(x)\cdot\cos(x)+x$

Zwischenergebnis: $\int\cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot[\sin(x)\cdot\cos(x)+x]$

Anwendung für unser Integral:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos(u)\cdot\sqrt{1-\sin^2 u}\,du=\int\cos^2(u)\,du=\frac{1}{2}\cdot[\sin(u)\cdot\cos(u)+u]+C$$

Rücksubstitution: $x=\sin(u) \Rightarrow u=\arcsin(x)$

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot[\sin(\arcsin(x))\cdot\cos(\arcsin(u))+\arcsin(x)]+C$$

WISSEN: Für $x\in[-1;1]$ gilt $\sin(\arcsin(x))=x$ Siehe Text 47301 Seite 5

und $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$ Siehe Text 47311 Seite 4

Damit folgt die gesuchte Stammfunktion:

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)\right]+C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 1.2 $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ muss man zuerst auf die Form $\int\sqrt{1-u^2}\,du$ bringen:

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int\sqrt{4\left(1-\tfrac{x^2}{4}\right)}dx=2\int\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}dx=2\int\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^2}\,dx$$

Substitution: $\boxed{\tfrac{x}{2}=\sin(u)\quad\Rightarrow\quad dx=2\cdot\cos(u)\,du}$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\ldots=2\int 2\cdot\cos(u)\sqrt{1-\sin^2 u}\;du=4\int\cos^2(u)\,du$$

Nach dem Einschub in Beispiel 1 ist: $\int\cos^2(u)\,du=\tfrac{1}{2}\cdot\left[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\right]$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\ldots=4\int\cos^2(u)\,du=2\cdot\left[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\right]$$

Rücksubstitution: $\tfrac{x}{2}=\sin(u)\quad\Rightarrow\quad u=\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\ldots=2\cdot\left[\sin\left(\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\sin\left(\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)+\sin\left(\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right]$$

Umformungen: $\sin\left(\arcsin(x)\right)=x$

und $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=2\cdot\left[\tfrac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}+\tfrac{x}{2}\right]=x\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{4}}+x=x\sqrt{\tfrac{4-x^2}{4}}+x=x+\tfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}$$

Ergebnis: $\int\sqrt{4-x^2}\,dx=x+\tfrac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 1.3 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}{x^2}dx = a\cdot\int \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}{x^2}dx =$ (für a>0)

Substitution: $\boxed{\frac{x}{a} = \sin(u) \quad \Rightarrow \quad dx = a\cdot\cos(u)du}$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \ldots = a\int \frac{\cos(u)\sqrt{1-\sin^2(u)}}{a^2\cdot\sin^2(u)}\cdot a\cdot du = \int \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)}du = \int \cot^2(u)du =$$

Trigonometrische Umformung: $\cot^2 u = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} = \frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u} = \frac{1}{\sin^2 u} - 1 = \csc^2(u) - 1$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \ldots = \int \cot^2(u)du = \int (\csc^2(u)-1)du = \int \csc^2(u)\,du - u$$

Wegen $\cot'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$

ist $\int \csc^2(x)dx = -\cot(x)$ ein Grundintegral

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \ldots = -\cot(u) - u \overset{\text{oder}}{=} -\frac{\cos(u)}{\sin(u)} = -\frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u} - u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x}{a} = \sin(u) \quad \Rightarrow \quad u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}$

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}} - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C = -a\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Bringt man a als a^2 unter die Wurzel, folgt das

Ergebnis: $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 1.4 $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$ Dieses Integral „schafft“ man ohne diese Substitution!

1. Substitution:

$$u=\sqrt{4-x^2} \quad \Rightarrow \quad u^2=4-x^2 \quad \Rightarrow \quad 2u\cdot du=-2x\cdot dx$$

Ergibt $dx=-\frac{u}{x}du$ und $x^2=4-u^2$.

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx=-\int \frac{u}{x}\cdot\frac{u}{x}du=\int \frac{-u^2}{x^2}du=\int \frac{-u^2\ \boxed{+4-4}}{4-u^2}du=\int\left(\frac{-u^2+4}{-u^2+4}-\frac{4}{4-u^2}\right)du$$

2. Substitution:

$$z=\frac{u}{2} \quad \Leftrightarrow \quad u=2\cdot z \quad \Rightarrow \quad du=2\cdot dz$$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx=\ldots=u+\int \frac{4}{u^2-4}du=u+\int \frac{4}{4\cdot\left(\frac{u^2}{4}-1\right)}du=u+\int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2-1}du \overset{\text{Subst.}}{=} u+\int \frac{2dz}{z^2-1}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2}{z^2-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{z+1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}, \text{ denn:}$$

$$\frac{2}{z^2-1}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-1} \quad |\cdot\left(z+1,(z-1)\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2=A(z-1)+B(z+1)$$

Für z = 1: $2=2B \quad \Rightarrow \quad B=1$. Für z = -1: $2=-2\cdot A \quad \Rightarrow \quad A=-1$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx=\ldots=u-\int \frac{1}{z+1}dz+\int \frac{1}{z-1}dz=u-\ln|z+1|+\ln|z-1|=u+\ln\frac{|z-1|}{|z+1|}$$

Logarithmusregel: $-\ln a+\ln b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$

Rücksubstitution 2: $\boxed{z=\frac{u}{2}}$

$$\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx=\ldots=u+\ln\frac{\left|\frac{u}{2}-1\right|}{\left|\frac{u}{2}+1\right|}=u+\ln\frac{\left|\frac{u-2}{2}\right|}{\left|\frac{u+2}{2}\right|}=u+\ln\frac{|u-2|}{|u+2|}$$

Rücksubstitution 1: $\boxed{u=\sqrt{4-x^2}}$

Ergebnis: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx=\sqrt{4-x^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C$

Hinweis: Ein ähnliches Integral steht in 2.14

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 1.5 $\int\sqrt{2x-x^2}\,dx$

Methode: Man kann durch quadratische Ergänzung und geeigneter Substitution auf den Integranten $\sqrt{1-u^2}$ kommen und damit wie zuvor rechnen.

$$2x-x^2=-\left(x^2-2x\right)=-\left(x^2-2x\ \boxed{+1-1}\right)=1-(x^2-2x+1)=1-(x-1)^2$$

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

Substitution: $\boxed{\sin(u)=x-1\ \Rightarrow\ x=\sin(u)+1\ \Rightarrow\ dx=\cos(u)\cdot du}$

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx=\int\sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot\cos(u)\,du=\int\cos^2(u)\,du$$

Nach dem **EINSCHUB 1** von Seite 3 ist $\int\cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x)\cdot\cos(x)+x\right]$

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\ldots=\int\cos^2(u)\,du=\frac{\sin(u)\cdot\cos(u)+u}{2}$$

Rücksubstitution: $\boxed{u=\arcsin(x-1)}$

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\ldots=\frac{\sin(u)\cdot\sqrt{1-\sin^2(u)}+u}{2}=\frac{(x-1)\cdot\sqrt{1-(x-1)^2}+\arcsin(x-1)}{2}+C$$

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,dx=\ldots=\frac{(x-1)\cdot\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)}{2}+C$$

Beispiel 1.6 $\int\sqrt{4x-x^2}\,dx$ **Quadratische Ergänzung:**

$$4x-x^2=-\left(x^2-4x\right)=-\left(x^2-2x\ \boxed{+4-4}\right)=4-(x^2-2x+4)=4-(x-2)^2$$

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\int\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx=\int\sqrt{4\left[1-\frac{(x-2)^2}{4}\right]}\,dx=2\int\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}\,dx$$

Substitution: $\boxed{\sin(u)=\frac{x-2}{2}\ \Rightarrow\ x=2\sin(u)+2\ \Rightarrow\ dx=2\cos(u)\cdot du}$

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\ldots=2\int\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}\,dx=2\int\sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot 2\cos(u)\,du=4\cdot\int\cos^2(u)\,du$$

Nach dem **EINSCHUB 1** von Seite 3 ist $\int\cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x)\cdot\cos(x)+x\right]$

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\ldots=4\cdot\int\cos^2(u)\,du=2\cdot\left[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\right]=2\cdot\left[\sin(u)\cdot\sqrt{1-\sin^2(u)}+u\right]$$

Rücksubstitution: $\boxed{u=\arcsin\frac{x-2}{2}}$

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\ldots=2\cdot\left[\sin(u)\cdot\sqrt{1-\sin^2(u)}+u\right]=2\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}}+2\cdot\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\ldots=(x-2)\cdot\sqrt{\frac{4-(x-2)^2}{4}}+2\cdot\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

$$\int\sqrt{4x-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x-2)\cdot\sqrt{4x-x^2}+2\cdot\arcsin\frac{x-2}{2}+C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 1.7 $\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx$ **SCHWER**

Trickumformung durch Addition einer Nullsumme:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \left(x^2 \boxed{-4+4}\right) \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \left(\left(x^2-4\right)\sqrt{4-x^2} + 4 \cdot \sqrt{4-x^2}\right) dx$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx = \ldots = \int 4 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx + \int \left(x^2-4\right)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx = \ldots = \int 4 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx - \int \left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2}\,dx = \ldots = 4 \cdot \underbrace{\int \sqrt{4-x^2}\,dx}_{R} - \underbrace{\int \sqrt{4-x^2}^3\,dx}_{S}$$

1. Teilintegral: $R = \int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}\,dx = 2\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$

Trigonometrische Substitution: $\boxed{\frac{x}{2} = \sin(u) \quad \Rightarrow \quad dx = 2\cos(u)\cdot du}$

$$R = \ldots = 2\int \sqrt{1-\sin^2(u)} \cdot 2\cos(u)\,du = 4 \cdot \int \cos^2(u)\,du$$

Umformung siehe 1.1 $\boxed{\int \cos^2(u)\,du = \frac{1}{2}\left[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\right]}$

$$R = \ldots = 2\sin(u)\cdot\cos(u) + 2u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x}{2} = \sin(u) \quad \Rightarrow \quad u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$R = \ldots = 2\sin\left(\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\cdot\cos\left(\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + 2\cdot\arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

Umrechnungen:

$\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}$

$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ Beweis:

Aus $y = \arcsin(v)$ folgt $v = \sin(y)$

Also: $\cos(y) = \sqrt{1-v^2} \quad \Rightarrow \quad y = \arccos\left(\sqrt{1-v^2}\right)$

Daher folgt: $\arcsin(v) = \arccos\sqrt{1-v^2}$

und $\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \cos\left(\arccos\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

Zwischenergebnis: $R = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2\cdot\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

2. Teilintegral:

$$S = \int \sqrt{4-x^2}^3\,dx = \int \sqrt{4\cdot\left(1-\frac{x^2}{4}\right)}^3\,dx = 8\int \sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}^3\,dx \overset{\text{Subst.1}}{=} 8\cdot\int \sqrt{1-\sin^2(u)}^3 \cdot 2\cdot\cos(u)\,du$$

$$S = 16\underbrace{\int \cos^4(u)\,du}_{C}$$

Partielle Integration liefert

$$\int \cos^4(u)\,du = \frac{1}{4}\sin(u)\cdot\cos^3(u) + \frac{3}{8}\cdot\sin(u)\cdot\cos(u) + \frac{3}{8}u$$

Beweis nächste Seite.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beweis: $\int a' \cdot b \, du = a \cdot b - \int a \cdot b' \, du$ mit $\left\{ \begin{array}{lll} a' = \cos(u) & \Rightarrow & a = \sin(u) \\ b = \cos^3(u) & \Rightarrow & b' = 3 \cdot \cos^2(u) \cdot (-\sin(u)) \end{array} \right\}$

$$C = \int \cos^4(u) \, du = \sin(u) \cdot \cos^3(u) + 3 \cdot \int \cos^2(u) \cdot \sin^2(u) \, du$$

$$\int \cos^4(u) \, du = \sin(u) \cdot \cos^3(u) + 3 \cdot \int \cos^2(u) \cdot \left(1 - \cos^2(u)\right) du$$

$$\int \cos^4(u) \, du = \sin(u) \cdot \cos^3(u) + 3 \cdot \int \cos^2(u) \, du - 3 \cdot \int \cos^4(u) \, du \quad | \; + 3 \cdot \int \cos^4(u) \, du$$

$$4 \int \cos^4(u) \, du = \sin(u) \cdot \cos^3(u) + 3 \cdot \int \cos^2(u) \, du$$

Ersetzen: $\int \cos^2(u) \, du = \frac{1}{2} \cdot \left[\sin(u) \cdot \cos(u) + u\right]$

$$4 \int \cos^4(u) \, du = \sin(u) \cdot \cos^3(u) + \frac{3}{2} \cdot \left[\sin(u) \cdot \cos(u) + u\right]$$

$$C = \int \cos^4(u) \, du = \frac{1}{4} \sin(u) \cdot \cos^3(u) + \frac{3}{8} \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) + \frac{3}{8} u$$

$$S = 16 \underbrace{\int \cos^4(u) \, du}_{C} = 16 \cdot \left(\frac{1}{4} \sin(u) \cdot \cos^3(u) + \frac{3}{8} \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) + \frac{3}{8} u\right)$$

$$S = 4 \cdot \sin(u) \cdot \cos^3(u) + 6 \cdot \sin(u) \cdot \cos(u) + 6u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x}{2} = \sin(u) \quad \Rightarrow \quad u = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$S = 4 \cdot \underbrace{\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{\cos^3\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}^3} + 6 \cdot \underbrace{\sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\frac{x}{2}} \cdot \underbrace{\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)}_{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + 6 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$S = 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}^3 + 3 \cdot x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 6 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Zurück in die Ausgangsformel: $\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = \ldots = 4 \cdot \underbrace{\int \sqrt{4-x^2} \, dx}_{R} - \underbrace{\int \sqrt{4-x^2}^3 \, dx}_{S}$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = 4 \cdot \left[x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right] - \left[2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}^3 + 3 \cdot x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 6 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = 4x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 8 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}^3 - 3x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - 6 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} - 2x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = \left[x - 2x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\right]\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = \left[\frac{x^3}{2} - x\right]\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = \frac{x^3 - 2x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{4}} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3 - 2x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ergebnis: $\int x^2 \cdot \sqrt{4-x^2} \, dx = \frac{\left(x^3 - 2x\right)\sqrt{4-x^2}}{4} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Substitution mit sinh oder cosh

Hintergrund:

Integrale der Form $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ passen zu: $\sqrt{\sinh^2(x)+1}=\cosh x$.

Daher ist es naheliegend, die Substitution $x=\sinh(u)$ vorzunehmen.

Integrale der Form $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ passen zu: $\sqrt{\cosh^2(x)-1}=\sinh x$.

Daher ist es naheliegend, die Substitution $x=\cosh(u)$ vorzunehmen.

Beispiel 2.1: $\int\sqrt{x^2+4}\,dx$ muss zuerst auf die Form $\int\sqrt{u^2+1}\,du$ gebracht werden:

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\int\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}+1\right)\cdot 4}\,dx=2\cdot\int\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\,dx$$

Substitution: $\boxed{\frac{x}{2}=\sinh(u)\quad\Rightarrow\quad dx=2\cdot\cosh(u)\,du}$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=2\cdot\int\sqrt{\sinh^2(u)+1}\cdot 2\cdot\cosh(u)\,du=4\cdot\underbrace{\int\cosh^2(u)\,du}_{A}$$

1. Lösungsweg: **Umrechnungsformel verwenden:**

$$\boxed{\begin{aligned}\cosh(2x)&=2\cdot\cosh^2(x)-1\\ 2\cosh^2(x)&=\cosh(2x)+1\end{aligned}}$$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=2\cdot\int(\cosh(2u)+1)\,du=2\int\cosh(2u)\,du+2u$$

Grundintegral: $\boxed{\int\cosh(u)du=\sinh(u)\quad\Rightarrow\quad\int\cosh(2u)du=\frac{1}{2}\sinh(2u)}$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=2\int\cosh(2u)\,du+2u=2\cdot\frac{1}{2}\sinh(2u)+2u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x}{2}=\sinh(u)\quad\Rightarrow\quad u=\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=\sinh(2u)+2u=\sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Umrechnungsformel: $\boxed{\sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4}}$ Beweis siehe unten.

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=\sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4}+2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ergebnis: $\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4}+2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

Einschub: Beweis der Formel: $\boxed{\sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}}$:

Zunächst ist $\sinh(2u)=2\cdot\sinh(u)\cdot\cosh(u)$. mit $u=\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)$ folgt:

$$\sinh(2u)=2\cdot\sinh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\cosh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Da arsinh die Umkehrfunktion von sinh ist, gilt: $\sinh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}$

Wegen $\cosh u=\sqrt{\sinh^2(u)+1}$ folgt außerdem:

$$\cosh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\sqrt{\sinh^2\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+1}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}$$

$$\sinh(2u)=2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4}$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

2. Lösungsweg: **Hilfsintegral lösen:** $A = \int \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(x)\cdot\cosh(x)+x\right]$

Einschub 2: Berechnung dieses Integrals mit partieller Integration:

$\int \cosh^2(x)\,dx = \int \cosh(x)\cdot\cosh(x)\,dx$ Die Formel für die partielle Integration lautet:

$\int u'\cdot v\cdot dx = [u\cdot v] - \int v'\cdot u\cdot dx$ mit $\begin{cases} u' = \cosh(x) & \Rightarrow \quad u = \sinh(x) \\ v = \cosh(x) & \Rightarrow \quad v' = \sinh(x) \end{cases}$ ergibt:

$\int \cos^2(x)\,dx = \sin(x)\cdot\cos(x) - \int \sin^2(x)\,dx$ Anwenden: $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$

$\int \cosh^2(x)\,dx = \sinh(x)\cdot\cosh(x) - \int\left(\cosh^2(x)-1\right)dx$

$\int \cosh^2(x)\,dx = \sinh(x)\cdot\cosh(x) - \int \cos^2(x)\,dx + x \quad | \; + \int \cosh^2(x)\,dx$

$2\cdot\int \cosh^2(x)\,dx = \sinh(x)\cdot\cosh(x) + x$

Zwischenergebnis: $\int \cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(x)\cdot\cosh(x)+x\right]$

$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \ldots = 4\cdot\int \cosh^2(u)\,du = 2\cdot\left[\sinh(u)\cdot\cosh(u)+u\right]$

Rücksubstitution: $\frac{x}{2} = \sinh(u) \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)$

$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \ldots = 2\cdot\left[\sinh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\cosh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \ldots = \sinh(2u) + 2u = \sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)$

Jetzt Fortsetzung wie auf der Seite zuvor:

Umrechnungsformel: $\sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4}$

$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \ldots = \sinh\left(2\cdot\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4} + 2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)$

Ergebnis: $\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+4} + 2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right) + C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.2: $\int\sqrt{x^2-4}\,dx$ muss zuerst auf die Form $\int\sqrt{u^2-1}\,du$ gebracht werden:

$$\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\int\sqrt{\left(\frac{x^2}{4}-1\right)\cdot 4}\,dx=2\cdot\int\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}\,dx$$

Substitution: $\boxed{\frac{x}{2}=\cosh(u)\quad\Rightarrow\quad dx=2\cdot\sinh(u)du}$

$$\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\ldots=2\cdot\int\sqrt{\cosh^2(u)-1}\cdot 2\cdot\sinh(u)\,du=4\cdot\underbrace{\int\sinh^2(u)\,du}_{B}$$

1. Lösungsweg: **Umrechnungsformel verwenden:** $\boxed{\begin{array}{l}\cosh(2x)=2\cdot\sinh^2(x)+1\\ 2\sinh^2(x)=\cosh(2x)-1\end{array}}$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=2\cdot\int(\cosh(2u)-1)\,du=2\int\cosh(2u)\,du-2u$$

Grundintegral: $\boxed{\int\cosh(u)du=\sinh(u)\quad\Rightarrow\quad\int\cosh(2u)\,du=\frac{1}{2}\sinh(2u)}$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=2\int\cosh(2u)\,du-2u=2\cdot\frac{1}{2}\sinh(2u)-2u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x}{2}=\cosh(u)\quad\Rightarrow\quad u=\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\int\sqrt{x^2+4}\,dx=\ldots=\sinh(2u)+2u=\sinh\left(2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\qquad(**)$$

Umrechnungsformel: $\boxed{\sinh\left(2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}}$ Beweis siehe unten.

$$\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\ldots=\sinh\left(2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ergebnis: $\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

Einschub: Beweis der Formel:

Zunächst ist $\sinh(2u)=2\cdot\sinh(u)\cdot\cosh(u)$. mit $u=\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)$ folgt:

$$\sinh(2u)=2\cdot\sinh\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cdot\cosh\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Da arcosh die Umkehrfunktion von cosh ist, gilt: $\cosh\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}$

Wegen $\sinh(u)=\sqrt{\cosh^2(u)-1}$ folgt außerdem:

$$\sinh\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\sqrt{\cosh^2\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)-1}=\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$$

$$\sinh(2u)=2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}$$

---

2. Lösungsweg: **Hilfsintegral:** $\boxed{B=\int\sinh^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(x)\cdot\cosh(x)-x\right]}$

Beweis analog zu dem auf Seite 7.

$$\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\ldots=4\cdot\int\sinh^2(u)\,du=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(u)\cdot\cosh(u)-u\right]=2\cdot\left[\sinh(u)\cdot\cosh(u)-u\right]$$

Umrechnungsformel: $\boxed{\sinh\left(2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}}$

$$\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\ldots=\sinh\left(2\cdot\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\text{ wie (**)}$$

Ergebnis: $\int\sqrt{x^2-4}\,dx=\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-4}+2\cdot\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)+C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.3: $\int\sqrt{x^2+4x}\,dx$ muss zuerst auf die Form $\int\sqrt{u^2-1}\,du$ gebracht werden:

Quadratische Ergänzung mit dem Ziel u^2-1:

$$x^2+4x+\boxed{+4-4}=\left(x^2+4x+4\right)-4=(x+2)^2-4=4\cdot\left(\frac{(x+2)^2}{4}-1\right)=4\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1\right)$$

Substitution:

$$\frac{x+2}{2}=\cosh(u)\quad\Rightarrow\quad x+2=2\cdot\cosh(u)\quad\Rightarrow\quad x=2=2\cdot\cosh(u)-2$$
$$\Rightarrow\quad dx=2\cdot\sinh(u)du$$

$$\int\sqrt{x^2+4x}\,dx=\int\sqrt{4\left(\cosh^2(u)-1\right)}\cdot2\cdot\sinh(u)\cdot du=4\underbrace{\int\sinh^2(u)\,du}_{B}$$

Aus Beispiel 2.2: $\boxed{B=\int\sinh^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(x)\cdot\cosh(x)-x\right]}$

$$\int\sqrt{x^2+4x}\,dx=\ldots=4\underbrace{\int\sinh^2(u)\,du}_{B}=2\left(\sinh(u)\cdot\cosh(u)-u\right)$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x+2}{2}=\cosh(u)\quad\Rightarrow\quad u=\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+2}{2}\right)}$

$$\int\sqrt{x^2+4x}\,dx=\ldots=2\sinh(u)\cdot\cosh(u)-2u=2\sinh\left(\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)\cdot\cosh\left(\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)-2\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

Umrechnungen:

$$\sinh\left(\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)=\sqrt{\cosh^2\left(\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)-1}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2-1}=\sqrt{\frac{(x+2)^2}{4}-1}=\sqrt{\frac{(x+2)^2-4}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4x}$$
$$\cosh\left(\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)\right)=\frac{x+2}{2}$$

$$\int\sqrt{x^2+4x}\,dx=\ldots=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\left(x^2+4x\right)}\cdot\frac{x+2}{2}-2\cdot\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

Ergebnis: $\int\sqrt{x^2+4x}\,dx=\frac{x+2}{2}\sqrt{\left(x^2+4x\right)}-2\arccos\left(\frac{x+2}{2}\right)+C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.4: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

Substitution: $x = \cosh(u) \Rightarrow dx = \sinh(u)\,du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sinh(u)\cdot du}{\sqrt{\cosh^2(u)-1}} = \int \frac{\sinh(u)\cdot du}{\sinh(u)} = \int 1\,du = u$$

Rücksubstitution: $x = \cosh(u) \Rightarrow u = \operatorname{ar}\cosh(x)$

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar}\cosh(x) + C$

Hinweise:

1. Dies ist sogar ein Grundintegral, weil gilt: $\operatorname{ar}\cosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
2. Es gibt diese Formel: $\operatorname{ar}\cosh(x) = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|$, daher gilt auch:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

Beispiel 2.5: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

Substitution: $x = \sinh(u) \Rightarrow dx = \cosh(u)\,du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\cosh(u)\cdot du}{\sqrt{\sinh^2(u)-1}} = \int \frac{\cosh(u)\cdot du}{\cosh(u)} = \int 1\,du = u$$

Rücksubstitution: $x = \sinh(u) \Rightarrow u = \operatorname{ar}\sinh(x)$

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{ar}\sinh(x) + C$

Hinweise:

1. Dies ist sogar ein Grundintegral, weil gilt: $\operatorname{ar}\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2. Es gibt diese Formel: $\operatorname{ar}\sinh(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, daher gilt auch:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.6: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}\,dx$ Der Radikand muss zuerst auf die Form

$\int \sqrt{u^2-1}\,du$ gebracht werden, und zwar mit dieser Umformung:

$$\sqrt{(x-2)(x-4)} = \sqrt{x^2-6x+8} = \sqrt{x^2-6x\ \boxed{+9-9}+8} = \sqrt{(x^2-6x+9)-1} = \sqrt{(x-3)^2-1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}}$$

Substitution: $\boxed{x-3=\cosh(u) \quad \Rightarrow \quad dx=\sinh(u)\,du}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-1}} = \int \frac{\sinh(u)}{\sqrt{\cosh^2(u)-1}}\,du = \int \frac{\sinh(u)}{\sinh(u)}\,du = \int 1\,du = u$$

Rücksubstitution: $\boxed{x-3=\cosh(u) \quad \Rightarrow \quad u=\operatorname{ar}\cosh(x-3)}$

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}\,dx = \operatorname{ar}\cosh(x-3)+C$

Umformung: $\boxed{\text{Wegen } \operatorname{ar}\cosh(v)=\ln\left|v+\sqrt{v^2+1}\right| \text{ für } v\geq 1 \text{ gilt auch:}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x-4)}}\,dx = \ln\left|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right|+C$$

Beispiel 2.7: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+5)}}$ Der Radikand muss zuerst auf die Form

$\int \sqrt{u^2-1}\,du$ gebracht werden, und zwar mit dieser Umformung:

$$\sqrt{(x+1)(x+5)} = \sqrt{x^2+6x+5} = \sqrt{x^2+6x\ \boxed{+9-9}+5} = \sqrt{(x^2+6x+9)-4} = \sqrt{(x+3)^2-4}$$

$$= \sqrt{4\cdot\left[\frac{(x+3)^2}{4}-1\right]} = 2\cdot\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-1} \quad \text{Also:} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+5)}} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-1}}$$

Substitution: $\boxed{\frac{x-3}{2}=\cosh(u) \quad \Rightarrow \quad dx=2\cdot\sinh(u)\,du}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+5)}} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{x+3}{2}\right)^2-1}} = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{2\cdot\sinh(u)}{\sqrt{\cosh^2(u)-1}}\,du = \int \frac{\sinh(u)}{\sinh(u)}\,du = \int 1\,du = u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x-3}{2}=\cosh(u) \quad \Rightarrow \quad u=\operatorname{ar}\cosh\frac{x-3}{2}}$

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x+5)}} = \arccos\frac{x-3}{2}+C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.8: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}$ Der Radikand muss zuerst auf die Form

Form gebracht werden: $\sqrt{u^2-1}$ durch diese Umformung:

$$\sqrt{x^2+8x+1} = \sqrt{x^2+8x\ \boxed{+16-16}+1} = \sqrt{\left(x^2+8x+16\right)-15} = \sqrt{(x+4)^2-15}$$

$$= \sqrt{15\cdot\left(\frac{(x+4)^2}{15}-1\right)} = \sqrt{15}\cdot\sqrt{\left(\frac{x+4}{\sqrt{15}}\right)^2-1}$$

Substitution: $\boxed{\frac{x+4}{\sqrt{15}} = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad dx = \sqrt{15}\cdot\sinh(u)\,du}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{\left(\frac{x+4}{\sqrt{15}}\right)^2-1}} = \int \frac{\sqrt{15}\cdot\sinh(u)}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{\cosh^2(u)-1}}\,du = \int \frac{\sinh(u)}{\sinh(u)}\,du = \int 1\,du = u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x+4}{\sqrt{15}} = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{ar}\cosh\frac{x+4}{\sqrt{15}}}$

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}} = \operatorname{ar}\cosh\left(\frac{x+4}{\sqrt{15}}\right)+C$

Hinweis: Es gibt diese Formel: $\operatorname{ar}\cosh(v) = \ln\left|v+\sqrt{v^2-1}\right|$, daher gilt auch:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x-1}} = \ln\left|\frac{x+4}{\sqrt{15}}+\sqrt{\left[\frac{x+4}{\sqrt{15}}\right]^2-1}\right|+C = \ln\left|\frac{x+4}{\sqrt{15}}+\sqrt{\frac{x^2+8x+16}{15}-1}\right|+C = \ln\left|\frac{x+4}{\sqrt{15}}+\sqrt{\frac{x^2+8x+1}{15}}\right|+C$$

$$= \ln\left|\frac{x+4}{\sqrt{15}}+\frac{1}{\sqrt{15}}\sqrt{x^2+8x+1}\right|+C = \ln\left|\frac{x+4+\sqrt{x^2+8x+1}}{\sqrt{15}}\right|+C = \ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+1}\right|-\ln\sqrt{15}+C$$

Fasst man $-\ln\sqrt{15}+C$ zu einer neuen Konstanten K zusammen, dann lautet das alternative

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}} = \ln\left|x+4+\sqrt{x^2+8x+1}\right|+K$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.9: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}$ Der Radikand muss zuerst auf die Form

Form gebracht werden: $\sqrt{u^2+1}$ durch diese Umformung:

$$\sqrt{x^2-4x+8}=\sqrt{x^2-4x\ \boxed{+4-4}+8}=\sqrt{\left(x^2-4x+4\right)+4}=\sqrt{(x-2)^2+4}$$

$$=\sqrt{4\cdot\left(\frac{(x-2)^2}{4}+1\right)}=2\cdot\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}$$

Substitution: $\boxed{\frac{x-2}{2}=\sinh(u)\ \Rightarrow\ dx=2\cdot\cosh(u)\,du}$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+1}}=\int\frac{dx}{2\cdot\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}}=\int\frac{2\cdot\cosh(u)}{2\cdot\sqrt{\sinh^2(u)+1}}du=\int\frac{\cosh(u)}{\cosh(u)}du=\int 1\,du=u$$

Rücksubstitution: $\boxed{\frac{x-2}{2}=\sinh(u)\ \Rightarrow\ u=\operatorname{ar}\sinh\frac{x-2}{2}}$

Ergebnis: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}=\operatorname{ar}\sinh\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

Hinweis: Es gibt diese Formel: $\operatorname{ar}\sinh(v)=\ln\left(v+\sqrt{v^2+1}\right)$, daher gilt auch:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}=\ln\left(\frac{x-2}{2}+\sqrt{\left[\frac{x-2}{2}\right]^2+1}\right)+C=\ln\left(\frac{x-2}{2}+\sqrt{\frac{x^2-4x+8}{4}}\right)+C=\ln\left(\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4x+8}\right)+C$$

$$=\ln\left(\frac{x-2+\sqrt{x^2-4x+8}}{2}\right)+C=\ln\left|x-2\sqrt{x^2-4x+8}\right|-\ln 2+C$$

Fasst man $-\ln 2+C$ zu einer neuen Konstanten K zusammen, dann lautet das alternative

Ergebnis: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+8}}=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+8}\right|+K$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.10: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx$ **mit a > 0**

Der Radikand muss zuerst auf die Form $\int \sqrt{u^2+1}\,du$ gebracht werden, und zwar mit dieser

Umformung: $$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\cdot\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = a\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \int \frac{1}{a^3\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}^3}\,dx$$

Substitution: $\frac{x}{a} = \sinh(u) \quad\Rightarrow\quad dx = a\cdot\cosh(u)\,du$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \int \frac{1}{a^3\sqrt{\sinh^2(u)+1}^3}\,a\cdot\cosh(u)\cdot du = \int \frac{a\cdot\cosh(u)}{a^3\cdot\cosh^3(u)}\cdot du = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2(u)}\cdot du$$

Einschub 3: $$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad\Rightarrow\quad \tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Grundintegral daher: $\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x)+C$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \ldots = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\cosh^2(u)}\cdot du = \frac{1}{a^2}\cdot\tanh(u)$$

Umrechnungsformel: $$\tanh(u) = \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} = \frac{\sinh(u)}{\sqrt{\sinh^2(u)+1}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \ldots = \frac{\tanh(u)}{a^2} = \frac{\sinh(u)}{a^2\cdot\sqrt{\sinh^2(u)+1}}$$

Rücksubstitution: $\frac{x}{a} = \sinh(u) \quad\Rightarrow\quad u = \operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \ldots = \frac{\sinh(u)}{a^2\cdot\sqrt{\sinh^2(u)+1}} = \frac{\sinh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{a^2\cdot\sqrt{\sinh^2\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)+1}}$$

Umkehrfunktion: arsinh ist die Umkehrfunktion von sinh: $\sinh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right) = \frac{x}{a}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \ldots = \frac{\sinh\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)}{a^2\cdot\sqrt{\sinh^2\left(\operatorname{ar\,sinh}\left(\frac{x}{a}\right)\right)+1}} = \frac{\frac{x}{a}}{a^2\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}} = \frac{x}{a^3\cdot\sqrt{\frac{x^2+a^2}{a^2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$

Ergebnis: $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.11: $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-18}^3}\,dx$

Der Radikand muss zuerst auf die Form $\int \sqrt{u^2-1}\,du$ gebracht werden, und zwar mit dieser

Umformung: $\sqrt{2x^2-18} = \sqrt{18\cdot\left(\frac{x^2}{9}-1\right)} = 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \int \frac{dx}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}^3}$$

Substitution: $\frac{x}{3} = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad dx = 3\cdot\sinh(u)\,du$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \int \frac{dx}{\left(3\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}\right)^3} = \int \frac{3\cdot\sinh(u)}{54\sqrt{2}\cdot\sqrt{\cosh^2(u)-1}^3}\,du = \int \frac{3\cdot\sinh(u)}{54\sqrt{2}\cdot\sinh^3(u)}\,du =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \ldots = \int \frac{3\cdot\sinh(u)}{54\sqrt{2}\cdot\sinh^3(u)}\,du = \frac{1}{18\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sinh^2(u)}\,du$$

Einschub 3: $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \quad \Rightarrow \quad \tanh'(x) = \frac{\sinh^2(x)-\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{1}{\sinh^2 x}$

Grundintegral daher: $\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = \coth(x)+C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \ldots = \frac{1}{18\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sinh^2(u)}\,du = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\coth(u) = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\cosh(u)}{\sinh(u)} = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\cosh(u)}{\sqrt{\cosh^2(u)-1}}$$

Rücksubstitution: $\frac{x}{3} = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{ar}\cosh\left(\frac{x}{3}\right)$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \ldots = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\cosh(u)}{\sqrt{\cosh^2(u)-1}} = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\cos\left(\operatorname{ar}\cosh\left(\frac{x}{3}\right)\right)}{\sqrt{\cosh^2\left(\operatorname{ar}\cosh\left(\frac{x}{3}\right)\right)-1}}$$

Umrechnungen: $\cosh\left(\arccos\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{x}{3}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \ldots = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}} = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}} = \frac{1}{18\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{x}{3}}{\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}} = \frac{x}{18\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2-9}}+C$$

Multipliziert man noch $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{x^2-9}$ folgt das

Ergebnis: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-18}^3} = \frac{x}{18\sqrt{2x^2-18}}+C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.12: $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx$

Der Radikand muss zuerst auf die Form $\int \sqrt{u^2-1}\,du$ gebracht werden, und zwar mit dieser Umformung:

$$\sqrt{x^2-3} = \sqrt{3\cdot\left(\frac{x^2}{3}-1\right)} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1}}{x^2}\,dx$$

Substitution:

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad dx = \sqrt{3}\cdot\sinh(u)\,du$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2-1}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{3}\sqrt{\cosh^2(u)-1}}{3\cdot\cosh^2(u)}\sqrt{3}\cdot\sinh(u)\,du$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx = \ldots = \int \frac{\sinh^2(u)}{\cosh^2(u)}\,du = \int \tan^2(u)\,du$$

Einschub:

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1-\tanh^2(x)$$

Also ist $\int \left(1-\tanh^2(u)\right)du = \tanh(u)$

d. h. $u-\int \tanh^2(u)\,du = \tanh(u) \quad \Rightarrow \quad \int \tanh^2(u)\,du = u-\tanh(u)$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx = \ldots = \int \tan^2(u)\,du = u-\tanh(u) = \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\tanh\left(\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)+C$$

denn **Rücksubstitution:**

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \cosh(u) \quad \Rightarrow \quad u = \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

Umformung:

$$\tanh\left(\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\sinh\left(\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)}{\cosh\left(\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)} = \frac{\sqrt{\cosh^2\left(\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right)-1}}{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$\tanh\left(\operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\sqrt{\frac{x^2}{3}-1}}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{x^2-3}{3}}}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}$$

Ergebnis: $\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx = \operatorname{ar\,cosh}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}+C$

Hinweis: Es gibt diese Formel: $\operatorname{ar\,cosh}(v) = \ln\left|v+\sqrt{v^2-1}\right|$, daher gilt auch:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^2}\,dx = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{x^2}{3}-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}+C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{3}}\right|-\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}+C$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|-\ln\sqrt{3}-\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}+C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right|-\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}+K$$

mit $K = -\ln\sqrt{3}+C$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.13: $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$ mit $a > 0$.

Dieses Integral ähnelt der Nummer 2.12. Doch wird es völlig anders gelöst.

1. Substitution:

$$u = \sqrt{x^2-a^2} \quad \Rightarrow \quad u^2 = x^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad 2u \cdot du = 2x \cdot dx$$

$$dx = \frac{u}{x}du \quad \text{und} \quad x^2 = u^2 + a^2.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \int \frac{u \cdot u}{x^2}du = \int \frac{u^2}{u^2+a^2}du$$

Trick-Umformung:

$$\frac{u^2}{u^2+a^2} = \frac{u^2 + \boxed{a^2 - a^2}}{u^2+a^2} = \frac{u^2+a^2}{u^2+a^2} - \frac{a^2}{u^2+a^2} = 1 - \frac{a^2}{u^2+a^2}$$

(Geht auch mit Partialbruchzerlegung.)

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \ldots = \int \left(1 - \frac{a^2}{u^2+a^2}\right)du = u - \int \frac{a^2}{u^2+a^2}du = u - \int \frac{a^2}{a^2\left(\frac{u^2}{a^2}+1\right)}du = u - \int \frac{1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}du$$

2. Substitution:

$$\boxed{z = \frac{u}{a} \quad \Leftrightarrow \quad u = a \cdot z \quad \Rightarrow \quad du = a \cdot dz}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \ldots = u - \int \frac{1}{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}du = u - \int \frac{a}{z^2+1}dz = u - a \cdot \arctan(z) = u - a \cdot \arctan\left(\frac{u}{a}\right)$$

Rücksubstitution 1:

$$\boxed{u = \sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \ldots = u - a \cdot \arctan\left(\frac{u}{a}\right) = \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C$$

Ergebnis:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C$$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 2.14: $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx$ analog zu 2.13:

1. Substitution:

$u=\sqrt{x^2+4} \;\Rightarrow\; u^2=x^2+4 \;\Rightarrow\; 2u\cdot du=2x\cdot dx$

Ergibt $dx=\frac{u}{x}du$ und $x^2=u^2-4$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx=\int \frac{u}{x}\cdot\frac{u}{x}du=\int \frac{u^2}{x^2}du=\int \frac{u^2}{u^2-4}du=\int\left(\frac{u^2-4}{u^2-4}+\frac{4}{u^2-4}\right)du=\int\left(1+\frac{4}{u^2-4}\right)du$$

2. Substitution:

$z=\frac{u}{2} \;\Leftrightarrow\; u=2\cdot z \;\Rightarrow\; du=2\cdot dz$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx=\ldots=u+\int \frac{4}{u^2-4}du=u+\int \frac{4}{4\cdot\left(\frac{u^2}{4}-1\right)}du=u+\int \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2-1}du \overset{\text{Subst.}}{=} u+\int \frac{2dz}{z^2-1}$$

Partialbruchzerlegung: $\frac{2}{z^2-1}=\frac{-\frac{1}{2}}{z+1}+\frac{\frac{1}{2}}{z-1}$, denn:

$\frac{2}{z^2-1}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-1} \quad |\cdot(z+1)(z-1)) \;\Leftrightarrow\; 2=A(z-1)+B(z+1)$

Für z = 1: $2=2B \;\Rightarrow\; B=1$. Für z = -1: $2=-2\cdot A \;\Rightarrow\; A=-1$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx=\ldots=u-\int \frac{1}{z+1}dz+\int \frac{1}{z-1}dz=u-\ln|z+1|+\ln|z-1|=u+\ln\frac{|z-1|}{|z+1|}$$

Logarithmusregel: $-\ln a+\ln b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}$

Rücksubstitution 2: $z=\frac{u}{2}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx=\ldots=u+\ln\frac{\left|\frac{u}{2}-1\right|}{\left|\frac{u}{2}+1\right|}=u+\ln\frac{\left|\frac{u-2}{2}\right|}{\left|\frac{u+2}{2}\right|}=u+\ln\frac{|u-2|}{|u+2|}$$

Rücksubstitution 1: $u=\sqrt{x^2+4}$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx=\ldots=u+\ln\frac{|u-2|}{|u+2|}=\sqrt{x^2+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|$$

Ergebnis:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\,dx=\sqrt{x^2+4}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+4}+2}\right|+C$$

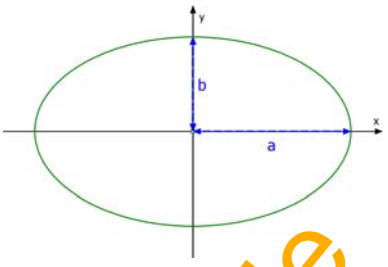
Demo-Text für www.mathe-cd.de

3. Anwendung bei der Flächenberechnung

Beispiel 3.1

Berechne den Flächeninhalt der Ellipse, die durch die Gleichung

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ definiert ist.



Lösung:

Ersatzfunktionen: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Leftrightarrow y^2=b^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ also $y_{1,2}=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

Das Pluszeichen gehört zu der Funktion, welche die oberen Halbellipse darstellt.

Berechnen des oberen rechten „Ellipsenviertels“:

$$\frac{1}{4}A=b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

Substition:

$\sin(u)=\frac{x}{a} \Rightarrow x=a\cdot\sin(u) \Rightarrow dx=a\cdot\cos(u)\cdot du$

Umrechnung der Grenzen: $u=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

$x_1=0 \Rightarrow u_1=0,\ x_2=a \Rightarrow u_2=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{4}A=b\int_{x_1=0}^{x_2=a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=b\int_{u_1=0}^{u_2=\pi/2}\sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot a\cdot\cos(u)du=ab\cdot\int_0^{\pi/2}\cos^2(u)\,du$$

Einschub von Seite 3:

$$\int\cos^2(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\left[\sin(x)\cdot\cos(x)+x\right]$$

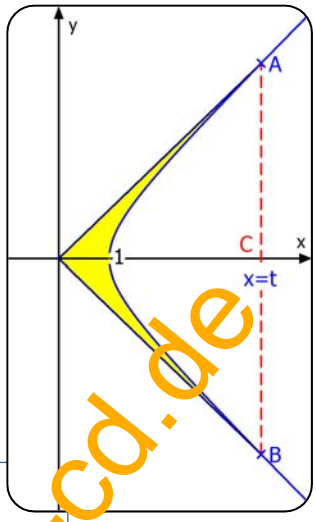
$$\frac{1}{4}A=\ldots=\frac{ab}{2}\left[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\right]_0^{\pi/2}=\frac{ab}{2}\underbrace{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{=0}+\frac{\pi}{2})-\frac{ab}{2}\underbrace{\left[\sin(0)\cdot\cos(0)+0\right]}_{0}=\frac{1}{4}\pi ab$$

Ergebnis: $A_{Ellipse}=\pi ab$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 3.2 **Berechnung eines Hyperbelsektors:**

am Beispiel der Einheitshyperbel: $x^2 - y^2 = 1$



An der Stelle x = t liegen zwei Hyperbelpunkte: $y_{A,B} = \pm\sqrt{t^2-1}$,

also $A\left(t \mid \sqrt{t^2-1}\right)$ und $B\left(t \mid -\sqrt{t^2-1}\right)$.

Durch A geht eine Ursprungsgerade mit der Steigung

$$m_A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t} \quad \Rightarrow \quad g_1: \quad y = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}x$$

Durch B geht die Ursprungsgerade g_2: $y = \frac{\sqrt{t^2-1}}{t}x$

Die Gerade g_1 und g_2 begrenzen zusammen mit der Hyperbel einen sogenannten Hyperbelsektor. Zeige: Sein Flächeninhalt beträgt $F = \operatorname{ar\,cosh}(t)$

Hinweis: *Daher der Namen AREA-Funktion (area = Fläche).*

Inhalt des Dreiecks OCA: $F_1 = \frac{1}{2}\cdot t \cdot \sqrt{t^2-1}$

Inhalt der Fläche zwischen der Hyperbel, der x-Achse und der Geraden x = t:

$$F_2 = \int_1^t \sqrt{x^2-1}\,dx$$

Substitution: $x = \cosh(u) \Rightarrow dx = \sinh(u)\cdot du$

Berechnung nur der Stammfunktion:

$$F(u) = \int \sqrt{\cosh^2(u)-1}\cdot\sinh(u)\cdot du) = \int \sinh^2(u)\cdot du$$

Nebenrechnung (Seite 11): $\int \sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(x)\cdot\cosh(x) - x\right]$

$$F(u) = \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(u)\cdot\cosh(u) - u\right]$$

Rücksubstitution: $x = \cosh(u) \Rightarrow u = \operatorname{ar\,cosh}(x)$

$$F(x) = \ldots = \frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(\operatorname{ar\,cosh}(x))\cdot\cosh(\operatorname{ar\,cosh}(x)) + \operatorname{ar\,cosh}(x)\right]$$

Umrechnungen: $\cosh(\operatorname{ar\,cos}(x)) = x$

$$\sinh(\operatorname{ar\,cosh}(x)) = \sqrt{\cosh^2(\operatorname{ar\,cosh}(x))-1} = \sqrt{x^2-1}$$

$$F(x) = \ldots = \frac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{x^2-1} + \operatorname{ar\,cosh}(x)\right]$$

$$F_2 = \int_1^t \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{x^2-1} + \operatorname{ar\,cosh}(x)\right]_1^t$$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(t\cdot\sqrt{t^2-1} + \operatorname{ar\,cosh}(t)\right) - \frac{1}{2}\left(1\cdot 0 + \operatorname{ar\,cosh}(1)\right) \qquad \text{Wegen } \operatorname{ar\,cosh}(1) = 0:$$

$$F_2 = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ar\,cosh}(t)$$

Inhalt des Hyperbelsekors: $F = 2\cdot(F_1 - F_2)$

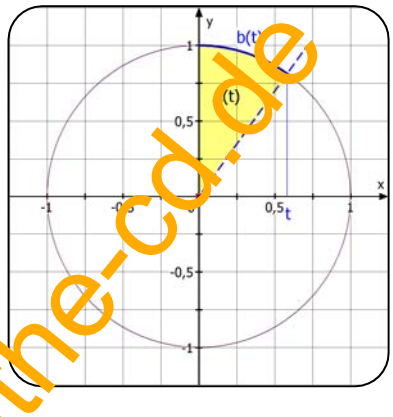
$$F = 2\left[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ar\,cosh}(t) - F_2 = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{ar\,cosh}(t)\right] = \operatorname{ar\,cosh}(t)$$

Erg: $F = \operatorname{ar\,cosh}(t)$

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Beispiel 3.3 Berechnung der Bogenlänge und Fläche eines Kreissektors

Das Thema ist hier „Bogenlänge“ eines Graphen. Dazu gibt es den Text 48130. Von Seite 14 bis 19 werden dort Längen von Kreisbögen berechnet. Dabei tritt „natürlich“ die Funktion arcsin auf. Ich sage „natürlich“, weil der „Vorname“ dieser Funktion, nämlich **arcus** bereits auf die Verwendung bei der Bogenlänge hinweist.



Hier jedoch auch ein Beispiel zur *Bogenlänge am Einheitskreis*:

Dieser hat die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$. Der obere Halbkreis ist daher Schaubild der Ersatzfunktion $f(x) = y = \sqrt{1-x^2}$

Gesucht ist der Kreisbogen von x = 0 bis x = t.

Formel für die Bogenlänge: $b(t) = \int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$b(t) = \int_0^t \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_0^t \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^t \sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^t \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Nun kann man auf zwei Arten weiterrechnen:

(1) Wenn man weiß dass dies ein Grundintegral ist $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$, folgt:

$$b(t) = [\arcsin(x)]_0^t = \arcsin(t) - \arcsin(0) = \arcsin(t)$$

Ergebnis: $b(t) = \arcsin(t)$

(2) Dieses Ergebnis erhält man auch, wenn man dieses Grundintegral nicht kennt.

Man muss dann eine **trigonometrische Substitution** vornehmen:

$$\boxed{x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \cos(t)\cdot dt}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\,dt = \int \frac{\cos(t)}{\cos(t)}\,dt = \int 1\,dt = t$$

Rücksubstitution: $\boxed{x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin(x)}$ liefert genau dieses Grundintegral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

Dann geht es weiter wie in (1).

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Formel für den Flächeninhalt:

$$F = F_1 - F_\triangle$$

Fläche zwischen dem Bogen und der x-Achse von 0 bis t:

$$F_1 = \int_0^t \sqrt{1-x^2}\,dx$$ **Trigonometrische Substitution**: $\boxed{x = \sin(u) \Rightarrow dx = \cos(u)\cdot du}$

$$F_1 = \int_0^t \sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot\cos(u)\,dx = \int_0^t \cos^2(u)\,du$$

Auf Seite 3 wurde mit partieller Integration gezeigt: $\int \cos^2(u)\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin(u)\cdot\cos(u) + u\right]$

Rücksubstitution: $\boxed{x = \sin(u) \Rightarrow u = \arcsin(x)}$

$$\int \cos^2(u)\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[\sin(\arcsin(x))\cdot\cos(\arcsin(x)) + \arcsin(x)\right]$$

Umrechnungen: $\sin(\arcsin(x)) = x$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \cos^2(u)\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[x\cdot\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right]_0^t = \frac{1}{2}\left(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin(t)\right) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin(t)$$

Fläche des Dreiecks unter dem Bogen:

$$F_\triangle = \frac{1}{2}\cdot t\cdot f(t) = \frac{1}{2}t\cdot\sqrt{1-t^2}$$

Zusammenfassen: $F = F_1 - F_\triangle = \frac{1}{2}\cdot\arcsin(t)$

Ergebnis: $F = \frac{1}{2}\cdot\arcsin(t)$

Hinweis: **Man erkennt den Zusammenhang zwischen Bogenlänge und Sektoreninhalt:**

$F = \frac{1}{2}\cdot b$ wenn r = 1 ist.

Man kann als Aufgabe das Beispiel 3.3 mit beliebigem Radius r nachrechnen.

Dann erhält man: $F = \frac{1}{2}\cdot b\cdot r$

Demo-Text für www.mathe-cd.de